



Министерство образования и науки Пермского края
Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение
«СОЛИКАМСКИЙ АВТОДОРОЖНО-ПРОМЫШЛЕННЫЙ
КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

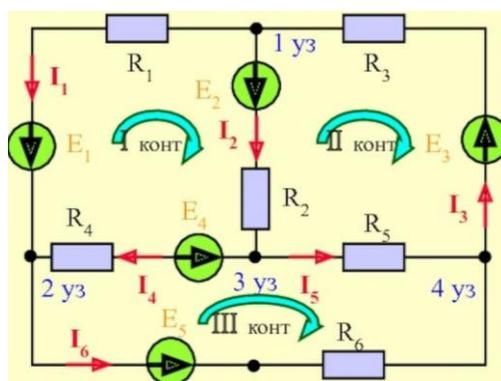
бинарного учебного занятия по дисциплинам

ОП.03 Электротехника и электроника

БУД.07 Математика, БУД.08 Информатика

Специальность 23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-
транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования
(по отраслям)

Применение законов Кирхгофа для расчета электрических цепей постоянного тока



Разработали: Ефимова Екатерина Леонидовна,
преподаватель общепрофессиональных дисциплин;

Сушко Наталья Николаевна,
преподаватель общеобразовательных дисциплин

Дата проведения: 12 декабря 2024г.

Соликамск, 2024

РАССМОТРЕНО:

на заседании ПЦК преподавателей
направления «Техника и технологии
наземного транспорта»

Протокол № 4 от 07.11. 2024 г.

Председатель: Е.Л.Ефимова Е.Л.Ефимова

РЕКОМЕНДОВАНО:

к участию в XV Общероссийском
фестивале педагогического
мастерства «Мастерство и
вдохновение»

Зам. директора

Е.Н.Лейрих

2024 г.



СОДЕРЖАНИЕ

1. Пояснительная записка.....	4
2. Технологическая карта учебного занятия.....	6
3. Ход занятия.....	8
4. Литература.....	11
Приложение А (жеребьевка).....	12
Приложение Б (презентация).....	13
Приложение В (кейс к уроку).....	22

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебное занятие на тему «Применение законов Кирхгофа для расчета электрических цепей постоянного тока» предусмотрено рабочей программой учебной дисциплины ОП.03 «Электротехника и электроника» специальности 23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования (по отраслям) является логическим продолжением изучения раздела «Электротехника». Параллельно урок позволяет закрепить полученные знания на предыдущих занятиях темы «Электрические цепи постоянного тока». Учебное занятие является бинарным, показывает взаимосвязь электротехники, математики и информатики.

В данной разработке отражен практико-ориентированный подход к проектированию учебного занятия в условиях внедрения ФГОС СПО и реализации основных профессиональных образовательных программ, направленных на формирование новых образовательных результатов.

Разработка урока содержит педагогический, методический и психологический аспекты учебного занятия. В педагогической структуре определен тип занятия, поставлены цели обучения, воспитания, развития обучающихся, формируемые компетенции, приведены используемые средства обучения, сформулированы требования к результатам освоения программы учебной дисциплины. Методическая структура занятия включает ход учебного занятия, организационный, целевой, содержательный компоненты (деятельность педагога и деятельность обучающихся), а также процессуальный компонент, содержащий методы, средства и формы обучения на занятии. В ней регламентированы организационно-мотивационный этап, этап самостоятельной работы по получению информации и нового практического опыта деятельности, рефлексивно-оценочной этап.

В приложении представлены материалы, способствующие реализации поставленной цели и задач практико-ориентированного урока: презентация,

кейс к уроку, содержащий буклеты «Интеллект-карта» «Справочные материалы», инструкции по работе.

Полученные знания и умения на данном уроке обучающиеся в дальнейшем смогут применить во время подготовки и участия в олимпиадах, конкурсах профессионального мастерства, при прохождении производственной практики и в своей будущей работе по специальности.

Данная методическая разработка учебного занятия может быть полезна преподавателям общеобразовательных и общепрофессиональных дисциплин.

Технологическая карта учебного занятия

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ЗАНЯТИЯ

Дисциплины ОП.03 Электротехника и электроника, БУД.07 Математика, БУД.08 Информатика	
Занятие Тема: «Применение законов Кирхгофа для расчета электрических цепей постоянного тока»	Раздел программы: электротехника
	Вид занятия: практико-ориентированный урок
	Тип занятия: урок систематизации и обобщения знаний и умений
	Форма занятия: бинарный урок
	Цель занятия: подготовка к олимпиаде специальностей 23.02.07, 23.02.04 через формирование умения применять законы Кирхгофа для решения профессиональных задач
	Задачи: <ol style="list-style-type: none"> 1. Актуализировать понятийный аппарат: узел, ветвь, контур, закон Ома для участка цепи, законы Кирхгофа 2. Познакомить с работой в программе Microsoft Excel 3. Установить особенности использования знаний математики и информатики в рамках изучения общепрофессиональной дисциплины ОП. 03 Электротехника и электроника 4. Развивать навыки профессиональных компетенций у обучающихся специальностей 23.02.07, 23.02.04
Формируемые компетенции: <p>ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.</p> <p>ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.</p> <p>ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.</p> <p>ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.</p> <p>ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности.</p> <p>ПК 2.3. Определять техническое состояние систем и механизмов подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования.</p> <p>ПК 3.1. Организовывать работу персонала по эксплуатации подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования</p> <p>ПК 5.5. Прогнозировать остаточный ресурс и уровень надежности подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования</p>	

Использованные педагогические технологии: Технология интегрированного обучения
Используемые технологии: 1. Информационные технологии 2. Технология развития критического мышления 3. Здоровьесберегающие технологии
Межпредметные связи: математика, физика, информатика
Средства обучения: Компьютер преподавателя, проектор, экран, презентация к учебному занятию, кейс к уроку, калькуляторы, ноутбуки для обучающихся с программой Microsoft Excel
Студент должен
уметь: решать уравнения методом подстановки, методом Крамера; составлять уравнения с использованием законов Кирхгофа, пользоваться программой Microsoft Excel знать: понятия электрическая цепь, электрические величины и их единицы измерения, узел, ветвь, контур, законы Ома, законы Кирхгофа, метод контурных токов
Планируемый продукт деятельности обучающихся
Интеллект-карта

Ход занятия

МЕТОДИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ЗАНЯТИЯ

Организационный компонент	Целевой компонент	Содержательный компонент		Процессуальный компонент			Время, мин.
		Деятельность педагога	Деятельность обучающихся	Методы	Средства	Формы	
				деятельности			
1. Организационный этап	Включить обучающихся в деятельностный ритм. Создать благоприятный климат в коллективе. ОК 04	Приветствие обучающихся. Проводит жеребьевку с использованием гербов России. Проверка готовности к учебному занятию.	Разбиваются на группы согласно жеребьевке и настраиваются на работу учебного занятия	Словесный, прием «обращение»	Приложение А	Индивидуальная, групповая	2
2. Мотивация учебной деятельности обучающихся	Побудить познавательный интерес к теме у обучающихся. ОК 01, ОК 03, ПК 2.3	При помощи презентации побуждает к формулированию темы урока обучающимися. Актуализирует полученные знания в профессиональной деятельности	Формулируют тему учебного занятия	Словесный, демонстрация	Слайд 1, Слайд 2	Фронтальная	1
3. Постановка цели и задач занятия	Совместно определить цель и задачи занятия ОК 02, ОК 04	Развивает умение постановки цели и планирования деятельности	Формулируют цель и задачи учебного занятия	Метод самостоятельного формулирования целей	Слайд 3	Коллективная	2
4. Актуализация знаний	Аккумулировать знания обучающихся о понятиях узел, ветвь, Контур, законе Ома для участка цепи, законах	Проверяет правильность ответов, предлагает привести примеры из жизненной практики	Сканируют QR- код и актуализируют понятия узел, ветвь, контур, закон Ома для участка цепи, законы Кирхгофа.	Самостоятельная работа, обсуждение, беседа	Слайды 4-10, кейс к уроку (интеллект карта), образовательна	Фронтальная, работа в группах	8

Организационный компонент	Целевой компонент	Содержательный компонент		Процессуальный компонент			Время, мин.
		Деятельность педагога	Деятельность обучающихся	Методы	Средства	Формы	
				деятельности			
	Кирхгофа ОК 01, ОК 02, ОК 03, ОК 04, ПК 2.3		Обсуждают сферы применения закона Кирхгофа в автомобиле. Заполняют оценочную таблицу		я платформа Joyteka.com		
5.Обобщение и систематизация знаний	Вспомнить и систематизировать знания применения законов Кирхгофа к расчету электрической цепи постоянного тока ОК 01, ОК 02, ОК 03, ОК 04, ПК 3.1	Предлагает обучающимся составить в группах уравнения, с применением законов Кирхгофа для решения задачи. Проверяет правильность составленных уравнений.	Составляют в группах уравнения с применением законов Кирхгофа для решения задачи.	Беседа, самостоятельная работа, обсуждение	Слайд 11, кейс к уроку (интеллектуальная карта)	Фронтальная, групповая	5
6.Динамическая минутка	Способствовать сохранению здоровья обучающихся, ослабить утомление, повысить эмоциональный фон. ОК 04, ОК 08	Проводит динамическую минутку	Выполняют упражнения, повторяя за педагогом	Практические	Слайд 12	Коллективная	2
7. Применение знаний и умений в новой ситуации	Способствовать формированию умения рассчитывать электрическую цепь постоянного тока с применением законов Кирхгофа методом подстановки, методом Крамера и методом	Разбивает членов каждой группы. Объясняет порядок выполнения задачи методом подстановки, методом Крамера и методом Крамера на ноутбуках с использованием программы Microsoft	Студенты решают задачу: под номером 1 - методом подстановки, под номером 2 и 3-методом Крамера, под номером 4 - методом Крамера на ноутбуках с использованием программы Microsoft	Объяснение, самостоятельная работа, обсуждение	Кейс к уроку (интеллектуальная карта, инструкции), слайды 13-14	Индивидуальная, групповая	20

Организационный компонент	Целевой компонент	Содержательный компонент		Процессуальный компонент			Время, мин.
		Деятельность педагога	Деятельность обучающихся	Методы	Средства	Формы	
				деятельности			
	Крамера на ноутбуках с использованием программы Microsoft Excel ОК 01, ОК 02, ОК 04, ПК 3.1, ПК 5.5	Excel и проверки решения. Проверяет правильность решения задачи.	Excel Делают проверку с помощью уравнений баланса мощностей. Заполняют оценочную таблицу.				
8. Подведение итогов занятия	Проанализировать успешность достижения цели и задач ОК 01, ОК 02, ОК 03, ОК 04	Определяет уровень приобретенного опыта обучающихся	Делают выводы по итогам занятия, подводят итог в оценочной таблице	Оценка и анализ	Кейс к уроку (интеллект-карта)	Фронтальная	2
9. Домашние задание	Закрепить приобретенный опыт ОК 01, ОК 02, ОК 03, ОК 04	Объясняет домашнее задание на интерактивной доске	Осмысливают домашнее задание	Словесный	Слайд 16, кейс к уроку (интеллект-карта), интерактивная доска Unidraw.io	Индивидуальная	1
10. Рефлексия	Проанализировать деятельность обучающихся на занятии ОК 01, ОК 02, ОК 03, ОК 04	На интерактивной доске показывает значение каждой шкалы и выводит на диалог об ощущениях обучающихся	Оценивают динамику результатов развития относительно учебного занятия и самих себя на интерактивной доске. Обсуждают результаты учебного занятия и свои ощущения от урока с педагогом.	Открытый диалог	Слайды 17-18, интерактивная доска Unidraw.io	Индивидуальная, фронтальная	2
Всего							45

Литература

1. Аполлонский, С. М. Основы электротехники. Практикум / С. М. Аполлонский. — 2-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Издательство: Лань, 2022.
2. Афонько В. О., Новикова Н. В. Электрические и электронные компоненты устройств и систем. Лабораторный практикум/ учебник и практикум для среднего профессионального образования – Минск: Издательство: РИПО, 2022.
3. Бурнаева Э.Г., Леора С.Н, Обработка и представление данных в MS Excel. Учебник для СПО - Санкт-Петербург: Издательство: Лань, 2021.
4. Данилов И.А. Электротехника. Учебник для СПО - 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство: Юрайт, 2024.
5. Кольниченко Г.И. Основы электротехники. Учебник для среднего профессионального образования - Санкт-Петербург: Издательство: Лань, 2023.
6. Леонов В. Простой и понятный самоучитель Word и Excel. 3-е издание – Москва: Издательство: Эксмо, 2021.
7. Миленина, С. А. Электротехника : учебник и практикум для среднего профессионального образования / С. А. Миленина ; под редакцией Н. К. Миленина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024.
8. Шипачев, В. С. Математика : учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. С. Шипачев ; под редакцией А. Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2024.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Жеребьевка



Группа 1



Группа 2



Группа 3



Группа 4

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

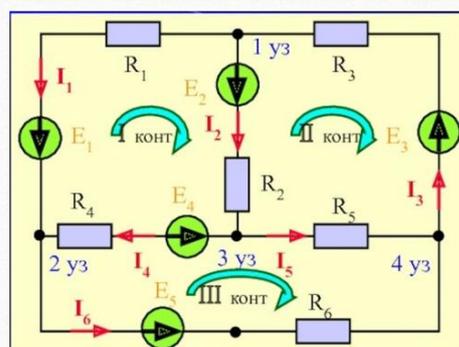
Презентация

Слайд 1



Слайд 2

Применение законов Кирхгофа для расчета электрических цепей постоянного тока



Слайд 3

Понятийный аппарат

Цель: подготовка к олимпиаде специальностей 23.02.07, 23.02.04 через формирование умения применять законы Кирхгофа для решения профессиональных задач



Задачи:

1. Актуализировать понятийный аппарат: узел, ветвь, контур, закон Ома для участка цепи, законы Кирхгофа
2. Познакомить с работой в программе Microsoft Excel
3. Установить особенности использования знаний математики и информатики в рамках изучения общепрофессиональной дисциплины ОП. 03 Электротехника и электроника
4. Развивать навыки профессиональных компетенций у обучающихся специальностей 23.02.07, 23.02.04

Слайд 4



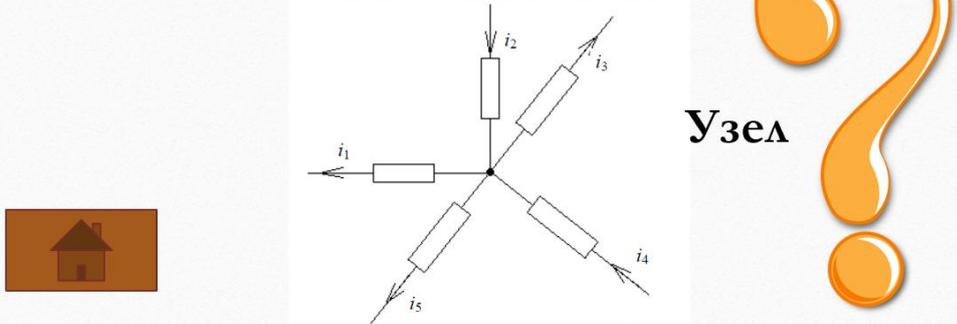
Угадай, что на картинке?



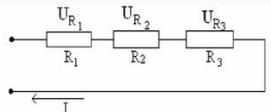
Слайд 5

Место соединения трех и более ветвей



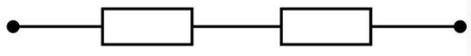
Узел

Слайд 6



Ветвь

Участок электрической цепи, расположенный между двумя узлами, состоящий из одного или нескольких последовательно соединенных элементов

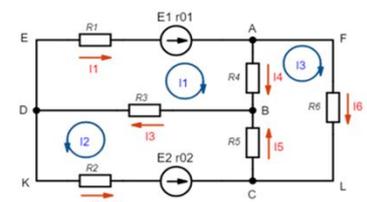


Слайд 7



Замкнутый путь, проходящий через несколько ветвей и узлов разветвлённой электрической цепи

Контур





Слайд 8



Закон Ома для участка цепи

$$I = \frac{U}{R}$$

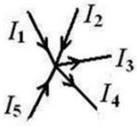


Слайд 9



1 закон Кирхгофа

- Алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю: $\sum I_k = 0, \quad I_1 + I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0$
- Сумма токов, направленных к узлу, равна сумме токов направленных от узла. $I_1 + I_2 + I_5 = I_3 + I_4$





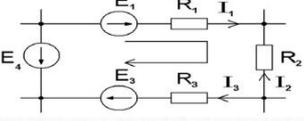
Слайд 10



2 закон Кирхгофа

В любом контуре схемы электрической цепи алгебраическая сумма напряжений на всех элементах равна алгебраической сумме Э.Д.С.

$$\sum_{k=1}^m U_k = \sum_{k=1}^m R_k I_k = \sum_{k=1}^n E_k$$



$$R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = -E_4 + E_1 + E_3$$



Слайд 11

Задача: Рассчитать неизвестные токи и э. д. с. E_2 для цепи, изображенной на рисунке. Сделать проверку решения через уравнения балансов мощностей. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Найти: I_1, I_3, E_2 .

Дано:

$E_1 = 8 \text{ В}$,

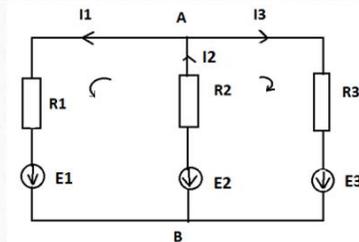
$E_3 = 5 \text{ В}$,

$I_2 = 1 \text{ А}$,

$R_1 = 2 \text{ Ом}$,

$R_2 = 4 \text{ Ом}$,

$R_3 = 3 \text{ Ом}$.



$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1 - E_2$$

$$R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_3 - E_2$$



Слайд 12

Динамическая минутка

Ну-ка, дружно встали вместе,
 Повернулись-ка на месте,
 Громко хлопнули три раза,
 Подмигнули правым глазом,
 Лево́й топнули ногой!
 А потом еще другой!
 Закричали все: "Ура!"
 А теперь и сесть пора!



Слайд 13

ОТВЕТЫ

$I_1 = 1,2 \text{ A}$

$I_3 = -0,2 \text{ A}$

$E_2 = 1,6 \text{ B}$



Слайд 14

Проверка: уравнения баланса мощностей

Уравнение мощностей источника тока

$$\sum I_k E_k = I_1 E_1 - I_2 E_2 + I_3 E_3 = 1,2 * 8 - 1 * 1,6 + (-0,2) * 5 = 9,6 - 1,6 - 1 = 7 \text{ Вт}$$

Уравнение мощностей потребителей тока

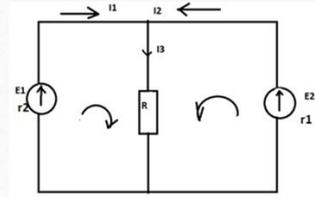
$$\sum_{k=1}^n I_k^2 R_k = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 1,2^2 * 2 + 1 * 4 + (-0,2)^2 * 3 = 1,44 * 2 + 1 * 4 + 0,04 * 3 = 7 \text{ Вт}$$



Слайд 15

Задача

Два источника с э. д. с. 1,2 и 1,5 В и внутренними сопротивлениями 0,3 и 0,5 Ом параллельно питают активное сопротивление 2 Ом. Определить токи в ветвях электрической цепи. Сделать проверку решения через уравнения балансов мощностей. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

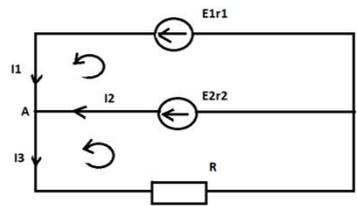


Слайд 16



Домашнее задание

Задача. Два параллельно соединенных элемента с одинаковыми $E_1 = E_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 1,5$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление $R=1,4$ Ом. Определить токи в ветвях цепи. Сделать проверку решения через уравнения балансов мощностей. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.



Слайд 17

The image shows a reflection card with a light wood-grain border. At the top left is a QR code. In the center, the word "Рефлексия" is written in a large, black, serif font. Below the title, there is a cartoon yellow emoji with large blue eyes, a wide smile, and its hands raised in a gesture of surprise or excitement. To the right of the emoji are two vertical scales. The first scale is labeled "Интересный урок" (Interesting lesson) and has a scale from 0 to 30 with tick marks every 5 units. The second scale is labeled "Моё участие" (My participation) and also has a scale from 0 to 30 with tick marks every 5 units. Both scales are currently empty, with no bars or marks indicating a score.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

КЕЙС К УРОКУ

Буклет «Интеллект-карта»

Оценочная таблица	
Оценка всей группе за Повторение (тест) (по 1 баллу за каждый верный ответ из 6 заданий; максимальное количество баллов 6)	
Оценка всей группе за решение задачи (максимальное количество баллов 6, т.е. 2 балла за решение методом подстановки, 2 балла за решение методом Крамера, 2 балла за решение методом Крамера с использованием программы Microsoft Excel)	
Оценка всей группе за проверку задачи через уравнения баланса мощностей (максимальное количество баллов 4)	
Итого баллов:	

Повторение:



Домашнее задание

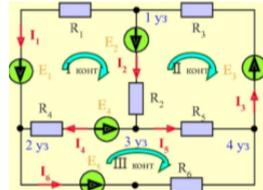


Спасибо за работу!



Интеллект-карта

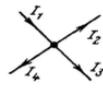
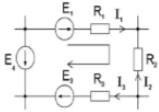
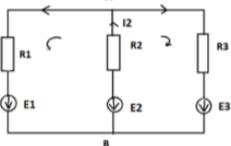
«Применение законов Кирхгофа для расчета электрических цепей постоянного тока»



Разработчики: Ефимова Е.Л., Сушко Н.Н.

Цель: подготовка к олимпиаде специальностей 23.02.07, 23.02.04 через формирование умения применять законы Кирхгофа для решения профессиональных задач

Применение законов Кирхгофа для расчета электрических цепей постоянного тока

Необходимые формулы	Задача:	Решение:
<p>▲ Закон Ома для участка цепи: сила тока в участке цепи прямо пропорциональна напряжению на его концах и обратно пропорциональна сопротивлению $I = U : R$</p> <p>▲ 1 закон Кирхгофа: Сумма токов, направленных к узлу, равна сумме токов направленных от узла.</p> <div style="text-align: center;">  <p>$I_1 = I_2 + I_3 + I_4$</p> </div> <p>▲ 2 закон Кирхгофа: В любом контуре схемы электрической цепи алгебраическая сумма напряжений на всех элементах равна алгебраической сумме Э.Д.С.</p> <div style="text-align: center;">  <p>$R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = -E_4 + E_1 + E_2$</p> </div>	<p>Расчитать неизвестные токи и Э.Д. С. E_2 для цепи, изображенной на рисунке. Сделать проверку решения через уравнения балансов мощностей. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.</p> <p>Дано: $E_1 = 8 \text{ В}$, $E_2 = 5 \text{ В}$, $I_2 = 1 \text{ А}$, $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$.</p> <p>Найти: I_1, I_3, E_2</p> <div style="text-align: center;">  </div>	<p>Решение: Решим задачу методом контурных токов. План решения:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Обозначить узлы на рисунке (верхний А, нижний Б). 2. Составить уравнение по 1 закону Кирхгофа для узла А: 3. Составить уравнение по 2 закону Кирхгофа для левого контура: 4. Составить уравнение по 2 закону Кирхгофа для правого контура: 5. Решить получившуюся систему из трех уравнений с тремя неизвестными либо методом подстановки (№1), либо методом Крамера (№2, №3), либо методом Крамера с использованием программы Microsoft Excel <p>6. Составить и решить</p> <ul style="list-style-type: none"> • уравнение баланса мощностей источников тока по формуле $\sum I_k \cdot E_k$ • уравнение баланса мощностей потребителей по формуле $\sum I_k \cdot R_k$ <p>Ответы в уравнения баланса мощностей совпали, значит задача решена верно.</p>

Буклет «Справочные материалы»

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА В EXCEL

Разберем систему из 3 линейных уравнений с 3 неизвестными и запишем систему линейных уравнений в матричном виде $Ax=B$. Введем матрицы A (диапазон ячеек A1:C3) и B (диапазон ячеек H1:H3. В ячейке D2, с помощью функции МОПРЕД, запишем расчет определителя матрицы A:

	A	B	C	D	E
1	1	1	1	0	
2	2	0	1		
3	0	3	1		
4					
5					



Для поиска решения вычислим 3 дополнительных определителя матриц (диапазоны ячеек A5:C7, A9:C11; A13:C15), в каждом из которых вместо одного из столбцов подставляется матрица B. Например, вместо первого столбца (коэффициенты при переменной (1)), ставим столбец матрицы B (свободные коэффициенты):



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	1	1	0				
2	2	0	1					
3	0	3	1					
4								
5	1	1	0					
6	4	0	1					
7	1	3	1					
8								
9	1	1	0					
10	2	4	1					
11	0	1	1					
12								
13	1	1	1					
14	2	0	4					
15	0	3	1					

В ячейках D6, D10 и D14 рассчитываем определители матриц. Записываем в ячейки E6, E10 и E14 решение системы, по формуле Крамера (отношение определителя дополнительных матриц к определителю матрицы системы) (формулы =E6/D2, =E10/D2 и =E14/D2).

Вычислить определители 3-го порядка можно используя правило Саррюса:

Правило Саррюса

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{33}a_{21} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{31}a_{23} - a_{13}a_{23}a_{31}$$

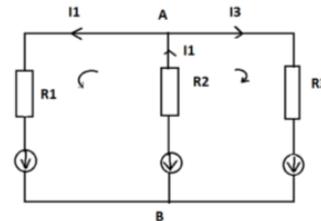
ГВПОУ СОЛИКАМСКИЙ АВТОДОРОЖНО-ПРОМЫШЛЕННЫЙ КОЛЛЕДЖ

Разработчик: Ефимова Е.А., Сушко Н.Н.



СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С 3-МЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ МЕТОДОМ ПОДСТАВКИ И МЕТОДОМ КРАМЕРА



Метод подстановки для решения системы с тремя неизвестными

Для использования нужно:

- Выразить одно из неизвестных из одного уравнения через два остальных неизвестных и подставить это выражение в оставшиеся два уравнения.
- Полученная система из двух уравнений с двумя неизвестными решается.
- Находят два неизвестных, а затем, зная их, и третье неизвестное.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 8 \\ x - y + z = -2 \\ 2x - 3y - 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 8 \\ x - y + z = -2 \\ 2x - 3y - 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z - 2 \\ y = -7z + 5 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Ответ: (2; 2; -1)



Метод Крамера

Правила Крамера для решения систем линейных уравнений:

- Если главный определитель системы отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение.
- Если главный определитель системы равен нулю, а хотя бы один из вспомогательных отличен от нуля, то система несовместна.
- Если главный определитель системы и оба вспомогательных равны нулю, то система совместна и имеет бесконечное множество решений (является неопределенной).

Алгоритм нахождения решений системы линейных уравнений с тремя переменными методом Крамера:

1. Вычисляем определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и убеждаемся, что он не равен нулю. Следовательно, система уравнений имеет единственное решение.

2. Вычисляем определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

3. По формулам Крамера (3.1) находим решение системы уравнений

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Задача 2. Найдите решение системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 13 \\ 2x - y + 3z = -2 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(-1-6) - 2(-2-3) - (4+1) = -15 + 10 - 5 = -10$$

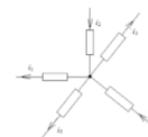
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 9 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 13(1-6) - 2(-2-27) - (-4+9) = -65 + 50 - 5 = -20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 13 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} - 13 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 3(-2-27) - 13(-2-3) - (18+2) = -75 + 65 - 20 = -30$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 13 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 13 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(-9+4) - 2(18+2) + 13(4+1) = -15 - 40 + 65 = 10$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-20}{-10} = 2, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-30}{-10} = 3, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{10}{-10} = -1$$

Ответ: (2; 3; -1)



Инструкции

**Инструкция по решению систем линейных
уравнений с тремя неизвестными
методом подстановки**

Для использования нужно:

- Выразить одно из неизвестных из одного уравнения через два остальных неизвестных и подставить это выражение в оставшиеся два уравнения.
- Полученная система из двух уравнений с двумя неизвестными решается.
- Находят два неизвестных, а затем, зная их, и третье неизвестное.

Пример

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x + 2y - z = 8 \\ x - y + z = -2 \\ 2x - 3y - 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(y - z - 2) + 2y - z = 8 \\ x = y - z - 2 \\ 2(y - z - 2) - 3y - 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow & \begin{cases} x = y - z - 2 \\ 5y - 4z = 14 \\ -y - 7z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z - 2 \\ y = -7z - 5 \\ 5(-7z - 5) - 4z = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z - 2 \\ y = -7z - 5 \\ -39z = 39 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - (-1) - 2 = 1 \\ y = -7 \cdot (-1) - 5 = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: (1;2;-1)

Инструкция по решению систем линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера.

Правила Крамера

- Если главный определитель системы отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение.
- Если главный определитель системы равен нулю, а хотя бы один из вспомогательных отличен от нуля, то система несовместна.
- Если главный определитель системы и оба вспомогательных равны нулю, то система совместна и имеет бесконечное множество решений (является неопределённой).

Алгоритм нахождения решений системы x линейных уравнений с тремя переменными методом Крамера:

Пример

1. Вычисляем определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и убеждаемся, что он не равен нулю. Следовательно, система уравнений имеет единственное решение.

2. Вычисляем определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. По формулам Крамера (3.1) находим решение системы уравнений

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Метод Крамера можно применять лишь в тех случаях, когда главный определитель системы отличен от нуля.

Для нахождения определителей 3-го порядка используется правило Саррюса:

Правило Саррюса

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Пример

$$\begin{aligned} I_1 + I_3 + 0 \cdot E_2 &= 1, \\ 2I_1 + 0 \cdot I_3 + E_2 &= 4, \\ 0 \cdot I_1 + 3I_3 + E_2 &= 1. \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} =$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} =$$

$$E_2 = \frac{\Delta_E}{\Delta} =$$

Инструкция по решению систем линейных уравнений с 3-мя неизвестными методом Крамера с использованием электронных таблиц Excel

Разберем систему из 3 линейных уравнений с 3 неизвестными и запишем систему линейных уравнений в матричном виде $Ax = B$.

Введем матрицы A (диапазон ячеек A1:C3) и B (диапазон ячеек H1:H3).

В ячейке D2, с помощью функции МОПРЕД, запишем расчет определителя матрицы A:

D2		fx			
	A	B	C	D	E
1	1	1	0		
2	2	0	1		
3	0	3	1		
4					
5					

Аргументы функции

МОПРЕД	
Массив	A1:C3 = {1;1;0;2;0;1;0;3;1}

Для поиска решения вычислим 3 дополнительных определителя матриц (диапазоны ячеек A5:C7; A9:C11; A13:C15), в каждом из которых вместо одного из столбцов подставляется матрица B. Например, вместо первого столбца (коэффициенты при переменной I1), ставим столбец матрицы B (свободные коэффициенты):

E15		fx							
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	1	1	0					1	
2	2	0	1	-5		B	=	4	
3	0	3	1					1	
4									
5	1	1	0						
6	4	0	1						
7	1	3	1						
8									
9	1	1	0						
10	2	4	1						
11	0	1	1						
12									
13	1	1	1						
14	2	0	4						
15	0	3	1						
16									

В ячейках D6, D10 и D14 рассчитываем определители матриц.

Записываем в ячейки E6, E10 и E14 решение системы, по формуле Крамера (отношение определителя дополнительных матриц к определителю матрицы системы) (формулы =E6/D2, =E10/D2 и =E14/D2).